La vérité des mathématiques est-elle absolue, comme le serait une idée de Dieu ? Comment l'enseigner ?

Vincent Jullien,

Univerité de Nantes, Chercheur au CAPHI et au SYRTE

Dieu, la vérité et les mathématiques

Lorsqu'il s'agit d'assurer la vérité indiscutable, absolue d'une proposition, d'un fait ou d'une thèse, il n'est pas rare que soit employée l'une ou l'autre des expressions suivantes : « c'est mathématique » ou, au choix, « c'est parole d'évangile ». Ainsi, le langage courant véhicule-t-il l'idée d'une sorte d'équivalence, quant au caractère absolu de la vérité, entre les mathématiques et les évangiles, soit, plus généralement la parole divine révélée. Voici donc que vérité, religion et mathématiques se trouvent immédiatement associées.

Sans doute, les utilisateurs de ces expressions ne souhaitent-ils pas défendre vraiment cette équivalence et certainement s'agit-il d'une « façon de parler » ; toutefois, les façons de parler ou manières de dire véhiculent souvent des enseignements qui méritent qu'on y porte attention.

En l'occurrence, la doctrine selon laquelle la vérité mathématique est étroitement liée à la vérité métaphysique est bel et bien une doctrine ancienne et très fortement argumentée. Jusqu'au XVII ou XVIII^{e} siècle, et ce, depuis l'aube de notre civilisation (en Grèce vers le VII^{e} avant J.C.), il y

a peu de remise en cause de l'existence de Dieu dans les textes scientifiques et philosophiques. Sous des formes différentes, on retrouve fréquemment la thèse d'une liaison entre les mathématiques et l'entendement divin ; elle est constituée de deux principales lignes d'arguments .

1. La première selon laquelle les vérités mathématiques peuvent être considérées comme des manifestations ou preuves de l'existence d'idées transcendantes (idéalités platoniciennes, intuitions cartésiennes). Selon la doctrine de Platon, qui a joué un rôle immense dans la conception que se font les mathématiciens de leurs propres objets et de leur pratique, les choses mathématiques sont des intermédiaires vers les idéalités liées à la perfection divine. Il n'est pas exagéré de dire que les mathématiques sont une voie –la voie peut-être- qui permet à l'esprit humain de parvenir aux contemplations et aux vérités absolues. Bien plus tard Descartes renouvelle cette catégorie d'arguments en considérant que nous disposons, en notre esprit, d' « étincelles de vérité absolue », d' « atomes de certitudes » qu'il nomme des intuitions ; ce sont les semences que Dieu a disposé en notre esprit, de manière à ce que nous soyons armés pour partir en quête de la vérité et sachions reconnaître l'erreur. Or, où trouve-t-on la majorité des exemples de telles étincelles de vérités, sinon en mathématiques ? A tel point que cette science est, pour Descartes le lieu où se forge la méthode pour bien raisonner en toutes choses. L'adéquation entre la connaissance de Dieu et les mathématiques est encore présente chez de nombreux mathématiciens et philosophes, chez Leibniz qui argumente en faveur de son nouveau calcul différentiel en montrant qu'il est exactement l'expression de la manière suivant laquelle Dieu a créé le monde « quand

Dieu crée, Dieu calcule », chez Spinoza qui ne voit pas de moyen supérieur de raisonner que de le faire *more geometrico*. Bien plus tard, le mathématicien Kronecker dira que « Dieu a donné les entiers naturels aux hommes, ils ont fait le reste ».

2. Le second groupe d'arguments puise dans l'idée selon laquelle il existe un domaine de savoir où la certitude humaine approche la manière divine. Lorsque l'on a compris que dans un triangle isocèle, les angles à la base correspondent aux côtés égaux, on l'a compris absolument, sans aucun résidu, parfaitement, ni plus ni moins que Dieu lui-même. Autrement dit, les mathématiques seraient le domaine de savoir où il est donné aux humains de connaître la vérité, comme Dieu la connaît. Cette conception a cependant fait l'objet d'âpres polémiques ; en effet on peut objecter par exemple que nous, humains, avons besoin de temps et d'une succession d'étapes pour démontrer un résultat, ce qu'un esprit infiniment puissant et omniscient ne nécessite pas. Précisément, lorsque les mathématiciens emploient des méthodes infinitésimales (les limites, les séries, l'intégration etc.), ils ne peuvent prétendre les connaître absolument puisque leur entendement est un entendement fini.

De tout ceci, on ne doit pas inférer que les mathématiques ne se sont développées qu'en rapport avec l'idée que les mathématiciens se faisaient de Dieu; depuis longtemps la plupart d'entre eux ne lui font nulle place dans leurs travaux et découvertes. Cependant, l'idée selon laquelle cette science est celle où la vérité est absolue et universelle a résisté à la laïcisation du savoir, si bien d'ailleurs que, dans l'esprit de la plupart d'entre nous, les théories et les résultats mathématiques, une fois établis, ne

se discutent pas ; ils sont alors vrais universellement et pour toujours. Nous reviendrons sur cette idée pour montrer qu'elle doit être critiquée.

Le monde, la vérité et les mathématiques

La croyance dans le caractère absolument vrai des démonstrations mathématiques a une autre source, parfois associée à celle que nous avons présentée, mais pas nécessairement. On peut –sans en référer à un Dieu omniscient- être impressionné par la puissance de cette science et surtout par l'efficacité dont elle fait preuve lorsqu'elle est utilisée dans d'autres domaines, en physique notamment. L'enseignement d'Aristote –qui a eu une influence immense dans l'histoire de notre civilisation (chez les grecs, les arabes et les latins)- soutenait pourtant une thèse opposée : les sciences de la nature ont pour objet des choses qui changent, dont la diversité et les variations sont quasi infinies, qui dépendent de l'écoulement du temps, dont les formes et les caractéristiques sont souvent irrégulières. Ces attributs sont tout l'opposé des objets du mathématicien, objets qui, eux, ne changent pas, ne sont pas soumis aux temps et aux circonstances et sont immatériels. Aussi, défendaient Aristote et ses adeptes, les mathématiques ne sauraient convenir à l'examen des phénomènes naturels : la physique, la biologie etc. ne peuvent valablement rendre compte de l'infinie diversité de la vie et de l'univers matériel. Cette idée a eu des échos que l'on reconnaît clairement dans l'exclamation de Diderot qui se moque ainsi des mathématiciens : « le géomètre est un homme qui met ses rêves en équations et qui aboutit à un résultat que l'expérience ne manque presque jamais de contredire ».

La doctrine contraire s'est cependant imposée au cours de ce qu'il est convenu d'appeler la *révolution scientifique*, ensemble de bouleversements intellectuels et pratiques dans les sciences dont –pour simplifier- on peut fixer les bornes grâce à deux livres, le *De Revolutionibus* de Copernic (1642) jusqu'au *Principia* de Newton (1685). Tournant le dos à la thèse de l'inadéquation des mathématiques et des phénomènes de la nature, Galilée soutient que

« La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur ».

Il faut bien le reconnaître, ce programme galiléen a connu depuis une succession de triomphes en vertu desquels une grande part de notre connaissance de la nature a été obtenue au moyen de théories fortement mathématisées. Les sciences modernes, physique, chimie, biologie, informatique doivent leur plus éclatants succès à l'union qu'elles ont pu nouer avec les mathématiques. Cette remarque ne signifie pas du tout qu'elles s'y réduisent, mais qu'elles ont bel et bien adopté cette science comme langage performant. L'idée de l'efficacité des mathématiques est ancienne, plus ancienne que la doctrine d'Aristote- et l'un des textes mathématiques égyptiens les plus anciens que nous connaissions, le *papyrus de Rhind*, a un sous-titre significatif, « Directions pour obtenir une connaissance de toutes les choses, inhérentes à tout ce qui existe, connaissance de tous les secrets ». Depuis les premiers grands succès de l'astronomie newtonienne et de la balistique, l'expression mathématique des phénomènes a semblé la voie royale vers la découverte des secrets de la nature. Deux difficultés majeures posées par les développements récents

des sciences naturelles ont même été surmontées grâce à des théories mathématiques puissantes : le caractère non déterministe de certains comportements matériels (considérés au niveau des particules, on vise ici essentiellement la physique quantique) qui a été traité de façon complètement satisfaisante par les modèles mathématiques proposés au milieu du XX^{e} siècle et le caractère non-linéaire de certains systèmes (la majorité ?) physiques et naturels, qui a aussi reçu des interprétations mathématiques élégantes et puissantes (Poincaré, Thom, Mandelbrot…).

Devrait-on en conclure que, puisqu'elles sont capables de raconter le monde et la nature, les mathématiques sont assurément le meilleur costume sous lequel nous puissions contempler la vérité ? On va voir que ce n'est pas si simple. D'abord parce que les modèles mathématiques adéquats dans les sciences naturelles sont parfois divers : un même phénomène peut être exprimé par des modèles ou des théories mathématiques différentes, ce qui suffit à établir que celles-ci ne disent pas le fin mot de la vérité de la chose. C'est une difficulté connue depuis l'antiquité, sous le nom de *théorème d'Hipparque*, et que les sciences physiques, astronomiques, statistiques etc. ont, depuis, maintes fois rencontrée. L'observation des planètes montraient qu'elles pouvaient marquer des moments de ralentissement, de station, de rétrogradation, avant de reprendre leur course générale d'ouest en est dans le fond du zodiac. Quelle était la trajectoire réelle qui rendait compte de cet étrange comportement ? Les géomètres –Hipparque notamment- proposèrent non seulement un, mais deux modèles conformes aux apparences, l'un, dit en épicycles, l'autre en excentriques : lequel était véritable *selon la nature des choses* ? Peut-être aucun de ceux-là, mais un autre, encore inconnu. Cette situation est devenue presque courante depuis lors : on peut simplement mentionner les superbes propositions de modélisations différentes et concurrentes de la mécanique quantique, ou encore –dans les années 1960- des théories mathématiques distinctes de la gravitation. Les phénomènes climatiques et les évolutions écologiques de notre système sont l'objet de modélisations mathématiques sophistiquées et changeantes. Dans son cours de physique, Bruhat écrivait ceci, au chapitre consacré aux gaz parfaits et à leur équation caractéristique : « De très nombreuses modifications ont été proposées par divers auteurs pour modifier ces formules (du type PV = RT) […] Aucune des équations caractéristiques proposées n'est vraiment satisfaisante. Depuis cent ans, plus de cinquante formules ont été proposées et essayées avec plus ou moins de succès ». La vérité mathématique, à propos de la nature, paraît ainsi fragilisée : diverse, parcellaire, provisoire ou changeante, concurrencée. Comme si la puissance de la vérité mathématique était indissociable de sa souplesse, ou de sa plasticité.

Une autre raison de tempérer notre conviction de la vérité mathématique du monde se déduit des réflexions raisonnables que nous pouvons faire à propos des phénomènes naturels eux-mêmes et des théories que nous énonçons pour les expliquer : elles sont provisoires et en évolution et leur relégation dans les archives de l'histoire des sciences entraîne les modèles mathématiques qui servaient à les exprimer. Prenons un simple exemple : si nous soutenions que la formule $F=k.mm'/d^2$ dit le vrai au sujet de l'attraction de deux masses, nous prendrions un risque sérieux dès lors que

la théorie de la relativité générale prendrait en quelque sorte le relais de la théorie newtonienne. (On verra sur ces points l'étude de Florence Robine).

Voici qui pose de sérieuses difficultés à la posture platonicienne d'un Galilée. Elle semblait pourtant forte : derrière l'infinie variété des cas particuliers d'un phénomène naturel, se cache sa vérité essentielle, et cette vérité essentielle est sa forme, ou cause, mathématique. Ainsi, derrière les façons différentes qu'ont de tomber vers le sol une feuille d'automne et une châtaigne, gît et œuvre une commune vérité, « les espaces parcourus par le mobile descendant du repos dans des temps égaux ont entre eux le même rapport que possèdent les nombres impairs qui se suivent à partir de l'unité » (ce qui s'écrit $x = k.t^2$). C'est profondément ce que reprochait déjà Descartes à son concurrent italien, une conception illusoire de l'abstraction et de la mathématisation. : il n'y a pas de supériorité ontologique des objets et relations mathématiques par rapport aux choses et relations qu'elles tentent de décrire.

La logique, la vérité et les mathématiques

Ces quelques remarques concernant la critique d'une conception trop unilatérale de la vérité mathématique se sont nourries d'arguments externes aux mathématiques : leur toute puissance et leur certitude est mise en doute, à partir de domaines où elles ont un grand rôle, mais qui demeurent des domaines qui ne se réduisent pas aux mathématiques. La remise en cause du concept de vérité mathématique la plus sérieuse, la plus dévastatrice, s'est développée au sein même des mathématiques.

On aurait tort de négliger tout un versant de la pratique mathématique, où se cultive un savoir assez pratique, voire empirique. Le nom même de *géométrie* nous rappelle qu'il peut s'agir d'une activité concrète de mesure et de comparaison plus concrète qu'abstraite. Des mathématiciens –Wallis par exemple- ont défendu la valeur de l'induction (partielle) pour établir des résultats généraux, ce qui fit écrire à Fermat que « sa façon de démontrer, qui est fondée sur l'induction plutôt que sur le raisonnement à la mode d'Archimède, fera quelque peine aux novices qui veulent des syllogismes démonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin ». Il faut cependant reconnaître que « nos » mathématiques –de Platon à Bourbaki- sont validées à condition d'être strictement et universellement déductives ; nous ne les considérons pas vraies parce qu'elles traduisent des données expérimentales mais parce qu'elles découlent nécessairement d'enchaînements logiques et d'idées abstraites.

Le socle sur lequel, durant deux millénaires, se sont édifiées ces mathématiques a été –pour une grande part- constitué par les *Eléments* d'Euclide. Ceux-ci bénéficiaient d'un double régime de vérité : rigoureusement démonstratifs (nous n'entrons pas ici dans les nombreux problèmes internes à ce traité) et aussi admirablement conformes à notre expérience sensible. Ils proposaient un édifice logiquement bien établi et décrivant –abstraitement- le monde tel qu'il est. Ainsi notait Leibniz,

> « Ce qui fait qu'il a été plus facile de raisonner démonstrativement en mathématiques, c'est en bonne partie parce que l'expérience y peut garantir le raisonnement à tout moment »[1].

Les théorèmes de mathématiques furent donc considérés comme vrais d'une part parce qu'ils étaient prouvés selon les procédures logiques irréfutables, ensuite parce qu'ils correspondaient très efficacement à notre

[1] NE, IV, 2, §9

expérience de la réalité. Emmanuel Kant a défendu et exprimé ce statut des propositions mathématiques ; sa doctrine est sans doute la plus puissante tentative jamais faite pour stabiliser la vérité mathématique dans une position double, qui tient de la pure logique et de la sensation. Posant la question de savoir s'il y a place pour une science par laquelle les règles de la pensée s'appliquent aux données de la perception, Kant répond affirmativement car la science mathématique participe à la fois de l'activité *a priori* qui appartient à l'intelligence et de l'intuitivité qui appartient à la sensibilité.

Cette situation n'est plus valide et l'absolue vérité mathématique a vacillé du piédestal où elle s'était crue installée à jamais. Le renversement s'est joué en deux actes : d'abord à l'occasion de la découverte des *géométries non euclidiennes*, puis lors de la *crise des fondements* au tournant des XIX et XX^{e} siècles. Lorsque l'on a découvert que le postulat des parallèles (qui garantissait que notre monde sensible ressemblait à celui de la géométrie) pouvait être nié, sans que la validité et la cohérence logique de la géométrie en soit affectées, le choc a été considérable : une des garanties de vérité des mathématiques s'effondrait. Le mathématicien Gauss enregistre ainsi cette transformation :

> « la géométrie non euclidienne ne contient absolument rien de contradictoire, quand bien même on doit au début tenir pour paradoxaux nombre de ses résultats ; mais, de les considérer comme contradictoires ne serait qu'une illusion amenée par l'habitude antérieure de considérer la géométrie euclidienne comme rigoureusement vraie »[2].

Restait l'autre pilier, la garantie logique justement. Puisqu'il n'était plus possible de partir des vérités premières de la géométrie, on imagina, avec

[2] lettre à Schumacher, juillet 1831, citée in Pont, p. 8

succès, de dériver la géométrie (les géométries) de la science des nombres, l'arithmétique. Ce programme fut réalisé notamment par Riemann. Pour atteindre au but fixé, encore fallait-il être sûr de la vérité des théories concernant les nombres. Les résultats obtenus parurent particulièrement satisfaisants puisque les nombres réels, auxquels ont a pu « rapporter » la géométrie, sont rigoureusement déductibles des nombres rationnels (Dedekind et/ou Cauchy), les nombres rationnels sont eux-mêmes déduits des nombres entiers naturels. Et ces derniers complètement garantis par la théorie des ensembles (de Cantor, Dedekind, Bolzano etc.). Autrement dit, dès lors que la théorie des ensembles est vraie, par voie de conséquence, la science des nombres l'est aussi, ainsi que la géométrie.

Pour faire bonne mesure, au début du XX^{e} siècle, la théorie de la relativité générale proposée par Einstein permit de réconcilier la géométrie et la matière puisque, selon cette théorie bien confirmée, le modèle convenable pour décrire les lignes de l'univers n'est pas la géométrie euclidienne, mais une géométrie, dite riemannienne plus générale que la géométrie euclidienne ; celle-ci pouvant être considérée comme un cas particulier (restreint) de géométrie. Tout semblait donc à nouveau en ordre pour que l'on pense disposer une notion forte de vérité mathématique. Ce n'est pourtant pas ce qui advint et la faille apparut au cœur même du dispositif : la théorie des ensembles est paradoxale : les célèbres paradoxes de Russell, de Cantor et celui de l'ensemble infini ont en effet imposé d'adjoindre à la théorie des ensemble une axiomatique complémentaire permettant de légiférer sur ce qui pouvait ou non être considéré comme un ensemble. On s'est aperçu qu'il était nécessaire, pour avoir une science strictement

déductive, de choisir librement d'ajouter certains énoncés dont on sait, depuis les travaux de Gödel notamment, qu'ils ne seront jamais démontrés (ni leur contraire).

Dans la réalité de l'activité mathématique, tout ceci a, au fond, un faible impact et les élèves, comme les enseignants, comme la plupart des chercheurs en mathématiques se soucient assez peu de savoir qu'aux confins des fondements logiques de leur science, il y règne un certain flou. Pour eux, la théorie « spontanée » des ensembles, les constructions des structures numériques, algébriques ou géométriques sont d'une rigueur en fait irréprochable et il n'est pas douteux que les résultats démontrés sont vrais.

Enseignement, mathématiques et vérité

Il est assez peu vraisemblable qu'un enseignant, au lycée, puisse être confronté à un élève qui lui demanderait ce qu'il pense de la vérité ou de la fausseté de l'axiome du choix ou de l'hypothèse du continu (deux énoncés *indécidables* de l'axiomatique ensembliste) ; et si, par extraordinaire, ceci se présentait, il serait possible d'exposer à un élève si singulier la situation limite atteinte par cette axiomatisation. Il est, en revanche, plus courant que des élèves veuillent savoir par exemple « pourquoi la règle des signes est vraie ? », ou encore « pourquoi on peut négliger des quantités infiniment petites ? ». Si la réponse à donner n'est pas évidente, c'est qu'elle peut avoir des sources et des justifications très différentes. D'un certain point de vue, la « bonne réponse » à ces question ne fait pas problème : la règle des signes résulte nécessairement du prolongement aux négatifs des propriétés d'associativité et de l'élément neutre additif, telles qu'elles existent pour les nombres positifs ; la seconde résulte nécessairement du formalisme en (ε, α) de Weierstrass et de la définition élémentaire de la continuité. On comprend bien que ces réponses peuvent rarement être livrées telles quelles et les programmes d'enseignement ont enregistré cette difficulté en suggérant des approches beaucoup plus empiriques des explications et des justifications fournies aux élèves. Selon l'interlocuteur, il conviendra peut-être de justifier la règle des signes par une analogie du genre « les amis de mes amis sont mes amis etc. » ou « l'affirmation d'une affirmation etc. » et de répondre à l'autre interrogation en ayant recours à la notion intuitive en vertu de laquelle « deux quantités qui diffèrent d'une grandeur inférieure à toute grandeur donnée sont égales ». On pourrait multiplier les exemples qui montreraient tous qu'en mathématiques même, la vérité ne se présente pas nue et resplendissante, mais cachée sous les voiles de la sensation et de l'intuition : quel élève prendrait au sérieux un enseignement de géométrie où il apprendrait que par un point extérieur à une droite donnée, il passe une infinité de parallèles, ou que la somme des angles d'un triangle ne vaut en général pas deux droits, ou qu'il n'existe pas de triangles semblables ? C'est pourtant vrai, sauf dans le cas très particulier généré par un postulat bien problématique.

Toujours est-il que cette science demeure celle où la vérité –même voilée- se donne à voir plus nettement que partout ailleurs. Il en résulte des avantages et des inconvénients qu'avaient déjà profondément médités Aristote. Elle a pour elle l'exactitude, la pureté, l'universalité et elle est occasion pour l'intelligence humaine de rencontrer la rigueur et l'univocité, elle est peu susceptible d'interprétations ambiguës. Elle a contre elle de ne

pas traiter *a priori* d'objets réels puisque les siens sont des fictions : une droite n'ayant pas de largeur est travestie et *trahie* dès qu'elle est représentée, deux objets réels ne sont jamais parfaitement égaux, le signe « = » est donc sans application dans le monde des choses concrètes. On a évoqué, *supra*, quelques unes des circonstances et des médiations qui restituent cependant une grande efficacité aux mathématiques lorsqu'elles sont appliquées à d'autres domaines de savoir. Encore faut-il ne pas oublier qu'alors, elles ne sont plus tout à fait des mathématiques, ou des mathématiques pures : elles gagnent en puissance ce qu'elles perdent en pureté.

L'essentiel est sans doute –en ce qui concerne l'enseignement- d'éviter les positions dogmatiques. Entre deux positions extrêmes du balancier (la pureté abstraite et axiomatique des mathématiques comme garantie de vérité devant régner dans l'enseignement est un choix dont on a pu mesurer les nuisances lors de l'épisode des « mathématiques modernes », et une conception pratique et empirique des mathématiques, dont les limites et les difficultés sont aussi néfastes), entre ces deux positons, les programmes et les enseignants doivent trouver un équilibre, un compromis. Ce compromis est au fond celui qui est à l'œuvre dans l'histoire même des mathématiques et aussi celui qui est à l'œuvre dans toute démarche pédagogique, ces deux remarques méritant quelque explication.

L'histoire des mathématiques nous enseigne que les développements des théories et des méthodes ont suivi des voies très variées, de la plus pure spéculation abstraite jusqu'à la recherche d'outils presque concrets capables de résoudre des problèmes matériels, depuis la voie rigoureusement hypothético-déductive jusqu'aux méthodes inductives et quasi-expérimentales. Autrement dit, adopter un jugement trop tranché revient à exclure des pans entiers de l'activité réelle de mathématiciens hors de l'histoire des mathématiques.

L'enseignement des mathématiques devrait repousser l'idée selon laquelle les élèves ne peuvent et ne doivent apprendre que ce qu'ils comprennent et dont la vérité leur est rationnellement accessible. Il faudrait, sinon, rejeter de l'enseignement toutes les méthodes et résultats dont on ne peut entièrement justifier analytiquement les procédures. Il convient de laisser une grande place aux « savoir-faire » dont l'élève ne sait pas complètement pourquoi il est vrai, sinon qu'il est efficace. Peu à peu, la justification rigoureuse fera la lumière sur ces pratiques performantes. Ceci n'est en rien contradictoire avec la nécessaire exactitude et la rigueur des procédures : simplement, cela signifie que l'on fait admettre aux élèves des règles ou lois « pratiques » qu'il devra utiliser avec rigueur et tenir pour vraies, avant de disposer de l'ensemble des énoncés premiers qui en permettent une analyse complète.

Il sera peut-être utile de donner deux exemples de cette « négociation » :

« Pourquoi la symétrie axiale est-elle isomorphe ? »

Les réponses possibles sont de nature très différentes, selon le niveau des élèves et l'objectif pédagogique visé ; selon aussi le genre d'esprit propre à chaque élève.

On peut proposer une observation empirique, par pliage et réalisation de taches de même forme de part et d'autre du pliage. Si cette manière n'est pas réellement démonstrative, elle est cependant susceptible d'emporter

l'adhésion et participe à un accroissement valide des connaissances géométriques.

On peut encore enseigner une construction à la règle et au compas, déterminée par les propriétés de la médiatrice. Elle accepte implicitement de nombreuses propriétés élémentaires de la géométrie euclidienne, en général admises empiriquement (égalité des triangles, conditions suffisantes pour qu'un quadrilatère soit un carré etc.)

On identifiera enfin la symétrie à une matrice carrée ayant certaines propriétés *a priori*. Sans doute aura-t-on à ce stade atteint une vérité d'intensité supérieure et on pourrait-dire que seule la troisième explication est pleinement satisfaisante du point de vue de la vérité, mais, est-elle praticable à tous niveaux ? Non bien sûr et on comprend bien qu'il est légitime de ne pas exiger ce niveau de vérité avant de fournir aux élèves des connaissances concernant la symétrie.

II. « La somme des n premiers impairs est égale au carré du nombre d'entiers considérés » (ou , un peu complexe, la somme des n premiers carrés est égale à n(n+1)(2n+1)/6). On peut établir ce genre de résultat à l'aide d'observation sur les nombres figurés, ou encore en observant que la formule est valide sur tous les ordres que l'on se donne la peine de vérifier et que, par induction, on admet qu'elle est valide généralement ; mais on ne sera pleinement au contact de la vérité logique qu'après avoir réalisé une démonstration par induction totale ou par récurrence. Encore faut-il avoir validé le principe d'induction totale, qui a fait l'objet de rudes polémiques entre Poincaré, Dedekind, Russell etc. On aurait tort de rejeter la pertinence de l'une ou l'autre de ces manières d'atteindre le résultat, elles ont toutes leur pertinence, de niveau différent.

Ainsi, même en tant que pures et abstraites, les mathématiques doivent tolérer une certaine négociation avec une conception trop absolue de la vérité. On devra donc accepter de faire des mathématiques selon des normes de vérité « faibles », mais heuristiquement nécessaires ; à condition,

sans doute que l'enseignant dispose, dans sa culture, des garanties formelles plus exigeantes. On touche là le point sans doute le plus délicat. Une condition nécessaire pour correctement décliner le concept de vérité en mathématiques est la maîtrise d'une solide culture historique et philosophique à propos des mathématiques. C'est la seule manière pour l'enseignant de pouvoir sereinement affronter les légitimes questions ou critiques des élèves face à cette discipline curieuse, si simple et si pure et pourtant si exigeante intellectuellement.